**Примеры моделей, получаемых из фундаментальных законов природы.**

Математическая модель — это абстрактное представление реального объекта, процесса или явления с использованием математических понятий, формул, уравнений и методов. Эта модель строится с целью описать и изучить основные характеристики и взаимодействия объекта или процесса, а также предсказать их поведение в различных условиях.

Математические модели позволяют ученым и инженерам более глубоко понимать природу явлений, предсказывать результаты экспериментов и оптимизировать системы. Они также играют важную роль в разработке новых технологий, управлении процессами и принятии решений в различных областях.

Рассмотрим модели, следующие из законов Архимеда, Ньютона, Кулона и других хорошо известных законов. Обсудим некоторые свойства рассматриваемых объектов.

Фундаментальные законы природы – это основные принципы, лежащие в основе всех физических явлений.

В механике существует несколько основных законов сохранения, которые играют важную роль в понимании и описании физических явлений. Законы сохранения являются фундаментальными принципами, которые говорят о том, что определенные величины остаются постоянными во время процессов и взаимодействий:

* Закон сохранения энергии
* Закон сохранения импульса
* Закон сохранения момента импульса
* Закон сохранения массы
* Закон сохранения заряда

***2.1. Траектория всплытия подводной лодки***

|  |  |
| --- | --- |
| https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/chapte10.gif | Пусть подводная лодка, находящаяся на глубине H и движущаяся с постоянной скоростью https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/chapte11.gif, получает приказ подняться на  поверхность.  Пусть, кроме того, промежуток времени, за который цистерны лодки освобождаются от воды и заполняются воздухом с тем, чтобы ее средняя плотность https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/chapte12.gifстала меньше плотности воды https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/chapte13.gif, невелик. Тогда можно считать, что в момент времени https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/chapte14.gif на лодку начинает действовать выталкивающая сила, большая, чем вес лодки. |

По законуАрхимеда, выталкивающая сила равнаhttps://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image524.gif, где g - ускорение свободного падения, V - объем подлодки. Вес подлодки https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image525.gif.

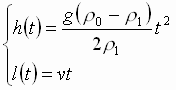
Суммарная сила, действующая на лодку в вертикальном направленииhttps://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image526.gif, а сообщаемое ею ускорение повторому закону Ньютона определяется из уравнения https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image527.gif, где https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image528.gifхарактеризует вертикальное перемещение. Координата https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image529.gif, характеризующая горизонтальное положение изменяется по закону движения тела с постоянной скоростью https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image530.gif.

Разумеется, эти уравнения относятся к центру масс лодки. Сопротивлением жидкости можно пренебречь.

Решая эти уравнения с учетом начальных условий https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image531.gif;   https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image532.gif;   https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image533.gif,  находим

https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image534.gif, https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image535.gif,

https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image536.gif, а из начальных условий находим  https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image537.gif

Таким образом  
(2.1.1)

Лодка всплывает на поверхность в момент https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image539.gifпри https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image540.gif  
https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image541.gif, https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image542.gif, где https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image543.gif- время всплытия.

При этом в горизонтальном направлении подлодка пройдет расстояние https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image544.gif.

Исключая из (2.1.1.) время, найдем траекторию движения подлодки в координатах (https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image545.gif, https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image546.gif) https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image547.gif, которая оказывается параболой с вершиной в точке https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image548.gif, https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image549.gif. Здесь пренебрегли другими силами, действующими по вертикали, например, сопротивлением воды.

Применение закона Архимеда и закона Ньютона позволило легко найти траекторию подлодки. Очевидно, что параболической траекторией обладает любое движущееся в плоскости тело, имеющее по одному из направлений постоянную скорость, и на которое в другом направлении действует постоянная сила. Например, полет камня, брошенного с высоты https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image550.gifс горизонтальной скоростью https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image551.gif.

***2.2. Колебание колец Сатурна***

Рассмотрим модель движения точечной массы https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image552.gifв поле сил тяготения, создаваемом материальным кольцом радиуса https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image553.gifи линейной плотностью https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image554.gifhttps://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image555.gif. Кольцо считается бесконечно тонким, и движение происходит вдоль оси кольца.

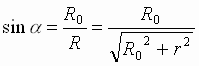
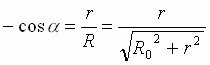
Решение

|  |  |
| --- | --- |
| https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/chapte15.gif | Данная схема может рассматриваться как идеализация процесса колебаний колец Сатурна. Тем не менее, несмотря на существенные упрощения, непосредственное использование закона всемирного тяготения https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/chapte16.gif, где https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/chapte17.gif – сила притяжения двух тел, имеющих  массы https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/chapte18.gif и https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/chapte19.gif, https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/chapte20.gif – расстояние между ними, https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/chapte21.gif - постоянная тяготения, не может дать окончательной модели движения колец Сатурна, так как массы https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/chapte22.gif, https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/chapte23.gif должны быть точечными. |

Поэтому вычислим сначала силу притяжения между точечной массой https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image564.gifи массой https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image565.gif, содержащейся в малом элементе кольца https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image566.gif, которую уже можно считать точечной

https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image567.gif.

Здесь https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image568.gif, https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image569.gif- соответственно расстояние от массы https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image564.gifдо кольца и до центра кольца. Очевидно, что при https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image570.gif(для https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image571.gif- аналогично)

, .

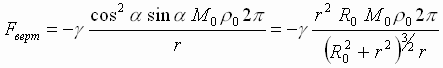
Поскольку https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image574.gif, то

https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image575.gif.

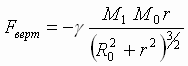
Найдем проекцию силы https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image576.gifна ось https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image577.gif, которая определяет интересующее нас движение

https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image578.gif.

Интегрируя по https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image579.gifот https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image580.gifдо https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image581.gif, найдем результирующую силу

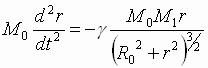
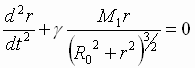
.

Обозначим массу кольца https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image583.gif. Тогда имеем

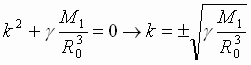
(2.2.1).

Горизонтальная составляющая результирующей силы равна нулю из-за симметричного расположения кольца относительно массы https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image564.gif.

Сила тяготения (2.2.1) существенно отличается от закона всемирного тяготения для двух точечных масс. Она переходит в него при https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image585.gif, когда кольцо можно уподобить точечной массе. Если же https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image586.gif, то https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image587.gif, и сила притяжения убывает с уменьшением расстояния между объектами.

Применив второй закон Ньютона к массе https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image564.gif, получим уравнение движения вдоль оси https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image588.gif  или - это уравнение колебаний, которое в отличие от п.2.1. существенно нелинейное, и становится линейным лишь при https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image591.gif

https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image592.gif. (2.2.2)

Это уравнение однородное линейное. Его характеристическое уравнение имеет вид  , а общее решение запишется в виде

https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image594.gif,  https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image595.gif.

***2.3. Движение шарика, присоединенного к пружине***

В получении моделей п.п.2.1, 2.2 главную роль играли фундаментальные законы, определяющие происхождение и величину сил, действующих на объект (синтез сил), а второй закон Ньютона был как бы вспомогательным и применялся на последней стадии построения моделей. Конечно, такое деление чисто условно. В задачах динамики можно использовать и другую схему: сначала с помощью закона Ньютона связать проекции ускорения тела с проекциями действующих на него сил, а затем, исходя из тех или иных соображений, вычислить эти силы как функции координат (и скорости), получив замкнутую модель. Продемонстрируем этот подход на примере движения шарика, прикрепленного к пружине с жестко закрепленным концом (рис.3).

Пусть https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image596.gif- координата шарика вдоль оси пружины, лежащей на горизонтальной плоскости, и направление движения шарика совпадает с ее осью. И пусть https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image597.gif- масса шарика, https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image598.gif- длина пружины в ненапряженном состоянии.

Решение

|  |  |
| --- | --- |
| https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/chapte24.gif | Начнем со второго закона Ньютона https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/chapte25.gif.  Считаем плоскость идеально гладкой и пренебрегаем сопротивлением воздуха. Примем во внимание то, что вес шарика уравновешен реакцией плоскости. Единственная сила, действующая на шарик в направлении оси https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/chapte26.gif– сила упругости пружины. Определим ее, используя закон Гука, гласящий, что для растяжения (сжатия) пружины необходимо приложить силу https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/chapte27.gif, где https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/chapte28.gif - характеризует упругие свойства пружины, а https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/chapte29.gif - величину ее растяжения или сжатия относительно нейтрального, ненагруженного состояния. |

Считаем плоскость идеально гладкой и пренебрегаем сопротивлением воздуха. Примем во внимание то, что вес шарика уравновешен реакцией плоскости. Единственная сила, действующая на шарик в направлении оси https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image600.gif- сила упругости пружины. Определим ее, используя закон Гука, гласящий, что для растяжения (сжатия) пружины необходимо приложить силу https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image601.gif, где https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image602.gif- характеризует упругие свойства пружины, а https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image603.gif- величину ее растяжения или сжатия относительно нейтрального, ненагруженного состояния.

Уравнение движения шарика принимает вид (линейный осциллятор)

https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image604.gif, https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image605.gif. (2.3.1.)

Оно описывает гармонические колебания с собственной частотой https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image606.gifи имеет общее решение https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image607.gif(2.3.2)

Значения https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image608.gifи https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image609.gifнаходятся из начальных условий, то есть через величины https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image610.gif, https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image611.gif, причем очевидно, что https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image612.gifпри https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image613.gif.

Заметим, что уравнение (2.3.1) совпадает с уравнением (2.2.2).

Подходы, которые применялись здесь, не должны противоречить другим фундаментальным законам природы. Соответствующая проверка противоречивости, если она возможна, весьма полезна для установления правильности модели.

Проверим правильность модели (2.3.1), основанной на втором законе Ньютона с помощью закона сохранения энергии. Так как точка крепления пружины неподвижна, то стенка не совершает работы над системой "пружина-шарик", и ее полная механическая энергия https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image614.gifостанется постоянной. Кинетическая энергия определяется движением шарика (пружина невесома)

https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image615.gif.

Потенциальная энергия содержится в пружине, ее можно найти, определив работу, необходимую для растяжения пружины на величину https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image569.gif

https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image616.gif.

Для неизменной со временем величины https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image617.gifполучаем

https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image618.gif.

Так как https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image619.gif, то, продифференцировав интеграл энергии по https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image620.gif, приходим к выражению

https://alexlarin.net/mogilevich/2.files/Image621.gif.

То есть получили зависимость (2.3.1), проверив правильность его вывода.

**Заключение**.

1. Даже в простейших ситуациях для построения модели может потребоваться использование не одного, а нескольких фундаментальных законов.
2. Прямое формальное применение фундаментальных законов к объекту, рассматриваемому как целое, не всегда возможно. В этих случаях требуется просуммировать элементарные акты взаимодействия между его частями, принимая во внимание свойства объекта (например, его геометрию).
3. Одними и теми же моделями могут описываться совершенно разные по своей природе объекты, подчиняющиеся разным фундаментальным законам, и, наоборот, данному закону могут отвечать принципиально разные модели (например, линейные и нелинейные).
4. Необходимо использовать все возможности для проверки правильности построения модели.